

耗波領域の誘電率の測定 (第2報)

八 木 寿 郎^{*}・内 田 照 雄^{**}

Measurement of Dielectric Constant in the Region of 6mm Wavelength (II)

Hisao YAGI , Teruo UCHIDA

The theory of dielectric constants was developed in the region of 6mm wavelength, especially using TE_{01n} modes and high-Q cavity. Also, dielectric constant of KCl crystal was measured at frequencies as high as 45.5 GC/S.

1 緒 言

マイクロ波領域における誘電率測定には、従来いろいろな方法があるが、耗波領域ではすでに第1報で述べた如く、空洞共振器による同調法が比較的容易に、しかも精度よく測定出来る場合が多い。すなわちQの高い共振器内部に試料を入れた場合と、取り去った場合について、同一モードの共振器点のずれから複素誘電率の実数部が、その時の共振器のQの値の変化から虚数部が求まる。この論文では、誘電率の測定の理論を耗波領域の測定に対してとりまとめ、現在の結果についても一部言及する。

2 測定の理論的考察

2・1 測定の一般的考察

耗波領域において空洞共振器を用いて試料の誘電率を測定する場合には通常 TE_{01n} モードを用いる。すなわちこのモードは、円形共振器内においては、磁場成分が半径方向の H_r と軸方向の H_z のみで、電場成分は回転方向の E_θ のみとなる。これ等は Maxwell の方程式を解いて簡単に求められる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} H_r &= -\frac{j\beta}{\omega\mu} \cdot J_1(kr) \cdot \{A \cos(\beta Z) - B \sin(\beta Z)\} e^{j\omega t} \\ H_z &= \frac{jk}{\omega\mu} \cdot J_0(kr) \cdot \{A \sin(\beta Z) + B \cos(\beta Z)\} e^{j\omega t} \\ E_\theta &= J_1(kr) \{A \sin(\beta Z) + B \cos(\beta Z)\} e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

ここで A, B……任意定数, β ……管内波長, ω ……角周波数
 ϵ ……誘電率, μ ……透磁率
 J_0, J_1 ……0次1次のベッセル函数
 $\beta=2\pi/\lambda_g$ λ_g ……管内波長

k は定数で, $\beta^2=\omega^2 \epsilon \mu - k^2$ である。

そこで第1図に示すように、共振時には、共振器の金属面の接線方向の電界成分は0でなければならないから、(1)式から

$$J_1(ka)=0 \quad B=0 \quad A \sin(\beta l)=0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

となり、 $ka=3.832$ になる。このモードの共振器内における電磁界の強度分布を第1図に示す。こ

$$b \leq Z \leq \ell_r$$

$$\left. \begin{aligned} H_{r0} &= -\frac{j\beta_0}{\omega\mu} \cdot J_1(kr) \cdot \{A_0 \cos(\beta_0 Z) - B_0 \sin(\beta_0 Z)\} e^{j\omega t} \\ H_{z0} &= \frac{jk}{\omega\mu} \cdot J_0(kr) \cdot \{A_0 \sin(\beta_0 Z) + B_0 \cos(\beta_0 Z)\} e^{j\omega t} \\ E_{\theta 0} &= J_1(kr) \cdot \{A_0 \sin(\beta_0 Z) + B_0 \cos(\beta_0 Z)\} e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

試料面 $Z=b$ において、(5)(6)式の電磁界の接線成分は連続でなければならないから

$$\begin{aligned} H_{r0}(Z=b) &= H_{rs}(Z=b) \\ \beta_0 \cdot \{A_0 \cos(\beta_0 b) - B_0 \sin(\beta_0 b)\} &= \beta_s A_s \cos(\beta_s b) \end{aligned} \dots\dots\dots(7)$$

$$\begin{aligned} E_{\theta 0}(Z=b) &= E_{rs}(Z=b) \\ A_0 \sin(\beta_0 b) + B_0 \cos(\beta_0 b) &= A_s \sin(\beta_s b) \end{aligned} \dots\dots\dots(8)$$

の二式が得られる。よって(4), (7), (8)式から

$$\frac{\tan(\beta_s b)}{\beta_s b} = \frac{\tan\{\beta_0(b+\Delta)\}}{\beta_0 b} \dots\dots\dots(9)$$

が導かれ、この式の右辺のうち、 b , Δ は測定され β_0 は波長測定から計算されるから、試料内の伝播定数 β_s を求めることができる。次に

$$\beta_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0' \mu - k^2$$

$$\beta_s^2 = \omega^2 \varepsilon_s' \mu - k^2$$

の関係から β_s と ε_s' の間では、次の式が成立つ。

$$\frac{\varepsilon_s'}{\varepsilon_0'} = \frac{\beta_s^2 + k^2}{\beta_0^2 + k^2} \dots\dots\dots(10)$$

これから比誘電率 $\frac{\varepsilon_s'}{\varepsilon_0'}$ が求められる。ここで、 $\tan(\beta_s b)$ は β_s の周期函数であるから、(9)式で与えられる β_s は適当なものを選ばなければならない。

2・3 $\tan\delta$ の測定理論⁽¹⁾

$\tan\delta$ は試料がある場合とない場合のQ値の変化測定から求められる。共振器のQ値は

$$\frac{1}{Q} = \frac{\text{消費電力}}{\omega \times \text{蓄積電磁エネルギー}}$$

で定義される。第3図に示すように試料がある場合のQ値を Q_L とすると、上の定義に従って

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q_L} &= \frac{\text{試料中のオーム損} + \text{壁面損失} + \text{外部損失}}{\omega \times \text{蓄積電磁エネルギー}} \\ &= \frac{1}{Q_{die}} + \frac{1}{Q_{wall}} + \frac{1}{Q_{ext}} \end{aligned} \dots\dots\dots(11)$$

$$\therefore \frac{1}{Q_{die}} = \frac{1}{Q_L} - \left\{ \frac{1}{Q_{wall}} + \frac{1}{Q_{ext}} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

ここで Q_{die} , Q_{wall} , Q_{ext} はそれぞれ試料のオーム損、壁面損失、外部損失を単独に考えた場合のQ値である。次にこれ等と $\tan\delta$ の関係を導く。

Q値を求めるために、まず共振器内の蓄積電磁エネルギー W を計算する。

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \varepsilon' \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV = \frac{1}{2} \iiint_V \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dV \dots\dots\dots(13)$$

ここで $\mathbf{E}^* \mathbf{H}^*$ は、 $\mathbf{E} \mathbf{H}$ の共軛複素ベクトル函数である。第3図に示すように試料中の蓄積エネルギーを W_s 、空気の部分における蓄積エネルギーを W_0 とすると、(5)式を(13)式に入れて

$$\begin{aligned} W_s &= \frac{1}{2} \iiint_V |\mathbf{E}_\theta|^2 dV \quad 0 \leq Z \leq b \\ &= A_0^2 \cdot \frac{\pi a^2 \cdot J_0^2(ka) \cdot \varepsilon_s' \cdot P \cdot (2b-s)}{8 \cos^2(\beta_0 \ell_r)} \end{aligned} \dots\dots\dots(14)$$

(6)式を(13)式に代入して

$$W_0 = A_0^2 \cdot \frac{\pi a^2 \cdot J_0^2(ka) \cdot \epsilon_0' \{2(\ell_r - b) - q\}}{8 \cos^2(\beta_0 \ell_r)} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで

$$p = \frac{\sin^2 \beta_0 (\ell_r - b)}{\sin^2(\beta_s b)}, \quad q = \frac{\sin \{2\beta_0 (\ell_r - b)\}}{\beta_0}, \quad s = \frac{\sin(2\beta_s b)}{\beta_s}$$

(14), (15)式から共振時における蓄積電磁エネルギー W として

$$\begin{aligned} W &= W_s + W_0 \\ &= A_0^2 \cdot \frac{\pi a^2 \cdot J_0^2(ka)}{8 \cos^2(\beta_0 \ell_r)} \cdot [\epsilon_s' P \cdot (2b - s) + \epsilon_0' \{2(\ell_r - b) - q\}] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (16)$$

を導くことが出来る。

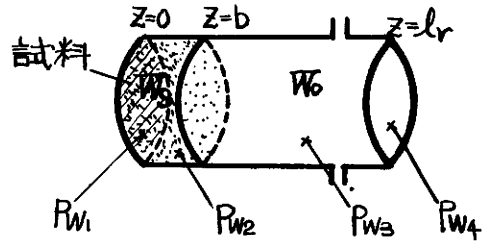
次に共振器壁面における消費電力 P_w を求める。

共振時において

$$\begin{aligned} P_w &= \frac{1}{2} \cdot \text{Re} \iint \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \frac{1}{2} \cdot \text{Re} \iint Z_w \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dS \end{aligned}$$

ここで $Z_w = (1 + j)(\omega \mu d)/2$ d …… 表皮厚

\mathbf{n} …… 壁面に立てた法線方向の単位ベクトル。



第3図 壁面損失

計算の都合上第3図に示すように P_w を4つの部分に分ける。

(5)式を(17)式に代入して

$$\begin{aligned} P_{w1} &= \frac{1}{2} \text{Re} \iint z_w \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dS \quad (z=0, \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi) \\ &= A_0^2 \cdot \frac{\pi a d \cdot J_0^2(ka)}{8 \mu \omega \cos^2(\beta_0 \ell_r)} \cdot \{2a p \beta_s^2\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (18)$$

同様にして

$$P_{w2} = A_0^2 \cdot \frac{\pi a d \cdot J_0^2(ka)}{8 \mu \omega \cos^2(\beta_0 \ell_r)} \cdot \{k^2(2b - s) \cdot p\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$P_{w3} = A_0^2 \cdot \frac{\pi a d \cdot J_0^2(ka)}{8 \mu \omega \cdot \cos^2(\beta_0 \ell_r)} [k^2 \{2(\ell_r - b) - q\}] \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$P_{w4} = A_0^2 \cdot \frac{\pi a d \cdot J_0^2(ka)}{8 \mu \omega \cdot \cos^2(\beta_0 \ell_r)} \{2a \beta_s^2\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

これ等の式をまとめて壁面損失 P_w は次式のようになる。

$$\begin{aligned} P_w &= P_{w1} + P_{w2} + P_{w3} + P_{w4} \\ &= A_0^2 \cdot \frac{\pi a d \cdot J_0^2(ka)}{8 \mu \omega \cos^2(\beta_0 \ell_r)} [k^2 \{P(2b - s) + 2(\ell_r - b) - q\} + 2a \{P \beta_s^2 + \beta_0^2\}] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (22)$$

次に誘電体中でのオーム損を求める。試料の導伝率を σ_s とするとオーム損 P_s は、

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{1}{2} \iint \sigma_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV \\ &= A_0^2 \cdot \frac{\pi a^2 \omega \epsilon_s' \cdot \tan \delta_s \cdot J_0^2(ka)}{8 \cos^2(\beta_0 \ell_r)} \cdot \{P(2b - s)\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 $\tan \delta_s \equiv \epsilon_s'' / \epsilon_s'$ である。

最後に結合穴を通して外部で消費される電力を求める。これは結合穴の点におけるポインティングベクトルに比例⁽²⁾すると考えられる。共振器内において電磁界は線形であり、ポインティングベクトルはクロスベクトルで与えられるから、外部損失 P_c は、今までの議論でも明らかなように、 A_0^2 に比例する。 P_c をあとの代数計算の都合のよい項であらわすと

$$P_c = \frac{\pi a d \cdot J_0^2(ka)}{8 \mu \omega} \cdot A_0^2 \cdot C \quad C \dots\dots\dots \text{比例定数} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここに与えられた比例定数 C 及び表皮厚 d は次に述べる方法で求めるのが適當である。これは第2図Aに示すような、試料のないときの共振器の Q の測定値 Q'_{01} と、理論値 Q_0 を等しいとおいて求められる。

第2図Aにおいて、共振器内の電磁界は

$$\left. \begin{aligned} H_r &= -\frac{j\beta_0}{\omega\mu} \cdot J_1(kr) \cdot A \cos(\beta_0 Z) e^{j\omega t} \\ H_z &= \frac{jk}{\omega\mu} \cdot J_0(kr) \cdot A \sin(\beta_0 Z) e^{j\omega t} \\ E_\theta &= J_1(kr) \cdot A \sin(\beta_0 Z) e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

蓄積エネルギー W 、壁面損失 P_w 、外部損失 P_e を求めれば

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iiint \epsilon_0' \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV \\ &= A^2 \cdot \frac{\pi \epsilon_0' a^2 \ell_0 J_0^2(ka)}{4} \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_w &= \frac{1}{2} \text{Re} \iint \mathbf{Z}_n \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dS \\ &= A^2 \cdot \frac{\pi a d J_0^2(ka)}{4\omega\mu} \cdot \{k^2 \ell_0 + 2\beta_0^2 a\} \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

$$P_e = A^2 \cdot C \cdot \frac{\pi a d J_0^2(ka)}{8\mu\omega} \dots\dots\dots (28)$$

これ等の式と Q の定義から

$$Q_0 = \frac{a}{d} \cdot \frac{\beta_0^2 + k^2}{k^2 + \frac{2a}{\ell_0} \cdot \beta_0^2 + \frac{C}{2\ell_0}} \dots\dots\dots (29)$$

(29)式から C および d を求めるには、 TE_{01n} および TE_{01m} における測定値 Q_{01n} 、 Q_{01m} と理論式の二つの連立方程式から求めればよい。

Q 値の定義と、これ等の式から Q_{die} 、 Q_{wall} 、 Q_{ext} はそれぞれ

$$Q_{die} = \frac{P(2b-s) + (\epsilon_0'/\epsilon_s') \{2(\ell_r - b) - q\}}{\tan\delta \cdot P(2b-s)} \dots\dots\dots (30)$$

$$Q_{wall} = \frac{P(2b-s) + (\epsilon_0'/\epsilon_s') \{2(\ell_r - b) - q\}}{\{d/a(\beta_s^2 + k^2)\} \cdot \{k^2 [P(2b-s) + 2(\ell_r - b) - q] + 2a(P\beta_1^2 + \beta_0^2)\}} \dots\dots\dots (31)$$

$$Q_{ext} = \frac{P(2b-s) + (\epsilon_0'/\epsilon_s') \{2(\ell_r - b) - q\}}{\{d/a(\beta_s^2 + k^2)\} \cdot C \cdot \cos^2(\beta_0 \ell_r)} \dots\dots\dots (32)$$

として求められる。

さらに、試料を入れたときの測定値 Q_L と、 Q_{wall} 、 Q_{ext} 、 $\tan\delta$ との関係は

$$\tan\delta_s = \frac{P(2b-s) + (\epsilon_0'/\epsilon_s') \{2(\ell_r - b) - q\}}{P(2b-s)} \cdot \left\{ \frac{1}{Q_L} - \frac{1}{Q_{wall}} - \frac{1}{Q_{ext}} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

となる。(33)式の右辺のうち Q_L は測定でき、あとのすべては ℓ_0 、 ℓ_r 、 b 等の測定から計算されるから、試料の $\tan\delta_s$ を求めることができる。

3 実 験

測定装置の組み立ての都合上、今回は6兆波領域における誘電率 ϵ_s' のみの測定を行なった。 ϵ_s'' については第3報で述べるこの測定に使用された共振器は第4図に示す通りである。これの材質は銅であり、可動ピストンは特に壁と接触しないようになっている。これは前述のように測定に用いる TE_{01n} モードには減衰を与えず、不要モードに大きな減衰を与えるためである。結合穴は、上部短絡面からはほぼ管内波長の $1/4$ のところにある。これは第一図の共振器内の電磁界強度分布図をみれば

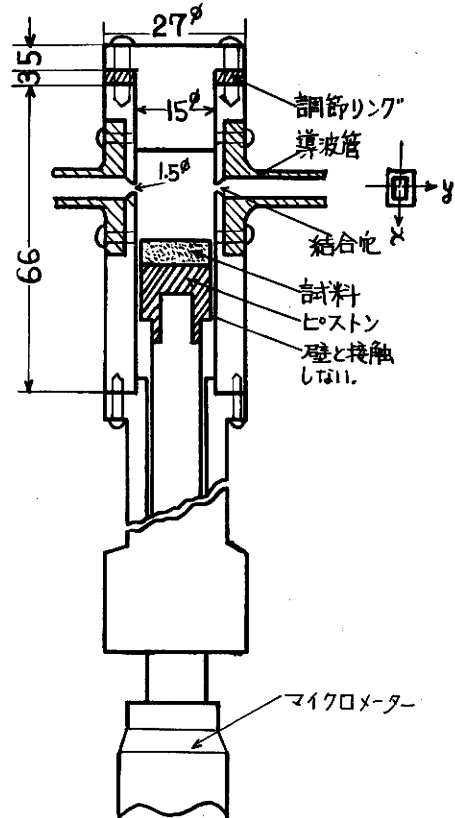
ば分るように, E_θ , H_z の最も強い位置で, 矩形導波管の電送モード, TE_{10} モードの電磁界成分 E_y , H_z が一致するためである。ここで結合穴が大きすぎると, 外部損失が大きくなり共振器の Q 値を引き下げる結果となるから注意を要する。

また周波数によって管内波長が変化するために図に示すように調節リングを入れて, 結合穴がほぼ $\lambda_g/4$ の位置にくるように調節する。

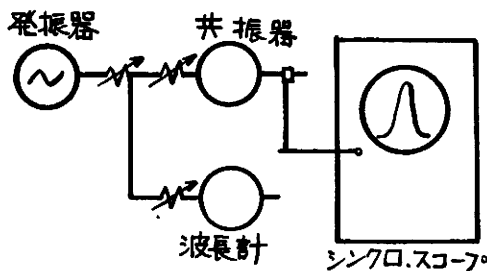
試料は KCl を使い, 表面は特にカーボランダムで注意してみがかれ, 厚さの精度は $1/100$ mm 以上である。発振管クライストロンは周波数変調されている。

共振点は第5図に示す方法でシンクロスコープに共振曲線を描かせる。ここで時間軸は周波数になっている。波長計を測定周波数に合わせ, シンクロスコープの共振曲線をみながら, 共振器のマイクロメーターを動かして, 波長計のマーカが共振曲線の頂上にくるようにして共振点を求めた。(第6図参照) その結果は次の通りである。

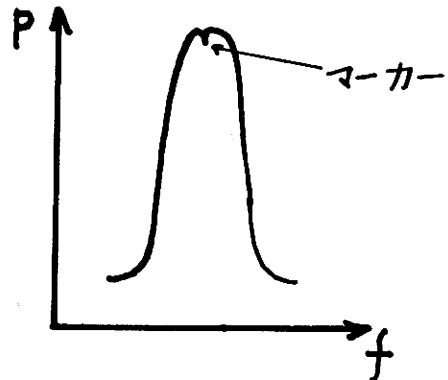
ここで共振軸長の変化分 $l_0 - l_r = \Delta$ は, それぞれの平均値をとってある。この Δ を(9)式に代入して比誘電率 ϵ_s'/ϵ_0' を得た。



第4図 測定用共振器



第5図 実験装置系統図



第6図 共振曲線

4 ま と め

6 耗波領域での固体の複素誘電率を測定するにあたり, 本論文において大体の理論的展望を明らかにした。実験は目下誘電率の実数部について正確に進められており, ついで準備がととのいた第虚数部に移る考えである。いずれ第3報以降に詳しく報告する。

この実験を行なうに当り, アルカリハライド結晶の正確な研磨に終始当たってくれた坪川勝治君に御礼のこたばを述べたい。

第1表 試料 KCl, 厚さ $b=3.04\text{mm}$ 温度 22°C

$f=45.25\text{GC/S}$				$f=45.51\text{GC/S}$			
試料がない場合		試料がある場合		試料がない場合		試料がある場合	
ℓ_o mm	モード	ℓ_r mm	モード	ℓ_o mm	モード	ℓ_r mm	モード
7.90	TE ₀₁₂	11.02	TE ₀₁₄	7.80	TE ₀₁₂	10.89	TE ₀₁₄
11.86	TE ₀₁₈	14.98	TE ₀₁₅	11.70	TE ₀₁₃	14.79	TE ₀₁₅
15.82	TE ₀₁₄	18.94	TE ₀₁₆	15.62	TE ₀₁₄	18.70	TE ₀₁₆
19.77	TE ₀₁₅	22.89	TE ₀₁₇	19.52	TE ₀₁₅	22.61	TE ₀₁₇
				23.42	TE ₀₁₆		
$\Delta \equiv \ell_o - \ell_r = 4.795$				$\Delta \equiv \ell_o - \ell_r = 4.727$			
$\epsilon'_s/\epsilon'_o = 4.86$				$\epsilon'_s/\epsilon'_o = 4.89$			

この研究は、昭和36年度および昭和37年度の文部省科学研究費（各個研究費）、昭和38年度の海外渡航費（Harvard 大学に留学）、昭和39年度の文部省科学研究費（機関研究費）による一連の研究として行なわれたもので、研究はさらに続行され発展させられている。

文 献

- 1) W. Jackson, F. Horner, T. A. Taylor, R. Dunsui and J. Lamb : J. I. E. E., **93** III (1946) 53.
- 2) J. L. Farrands : P. I. E. E., **101** III (1954) 404.
- 3) 八木寿郎 : 福井大学工学部研究報告, **12** (1964) 168.

(昭和39年9月30日受理)